Dieudonne Moduleについて (SchemeのBrauer群研究会報告集)

数理解析研究所講究録
53巻 1968年 170-194

Dieudonné module について

名大 理　小田忠雄

以下に述べる事の詳細及び参考文献は，The First De Rham Cohomology Group and Dieudonné Modules (to appear in Ann. Sci. École Norm. Sup.) 及び J. Tate: Endomorphisms of Abelian Varieties over Finite Fields, II (to appear in Inventiones math.) を見られたい。

§1. 序

kを標数pの完全体としよう。$p=0$のとき，k上の有限group scheme及びformal groupは必ずreducedであって（Cartierの定理），従って前者は，functor $G \longmapsto G(\bar{k})$を考える事によって，$Gal(\bar{k}/k)$の作用

を持った有限郡を考えることと、後者は $G \longmapsto Lie(G)$ によって Lie algebra を考えることと同値になる。従って特に、可換有限 group scheme 及び可換 formal group は、それぞれ $Gal(\bar{k}/k)$-module 及び k 上の vector space を考える事と同値になる。

しかし $p \neq 0$ の時には、Galois module や Lie algebra のみを考えるのでは不充分であり、そのために Dieudonné module を導入する。

Dieudonné の原論文以来、既に Cartier, Manin, Barsotti 等によって色々と論じられているが、いくつかの基本的な性質で未証明なものがあったり、不必要な制限のついたものがあるので、それを整理して §2 で述べる。§3 では、abelian variety に関して、Dieudonné module を応用すれば $l=p$ のときに l-adic Tate module に代るものが作れる事を述べる。§4 では、p-divisible を up to isogeny で分類する事について述べる。§3 及び §4 の新しい結果は Tate による。

最后に、最近 Cartier によって（C.R., t. 265, p.

49 〜 52．C. R., t. 265, p. 129 〜 132）．k が完全体でない場合にも．特別な可換 formal group に対して covariant な Dieudonné module が定義出来る事が示され、これを使って Mumford が次の様な事を証明した事をつけ加えておこう。　即ち．標数 p の体の上の任意の abelian variety は（まず ordinary な標数 p の体上の abelian variety の特殊化で得られ、従って）標数 0 の体上の abelian variety の特殊化（reduction mod. p）で得られる。ここに abelian variety が ordinary とは、位数が p の元の個数が．とりうる最大のもの．すなわち Hasse-Witt 行列が non-degenerate なもののことである。

§2．Dieudonné module

k を標数 $p \neq 0$ の完全体とする。

$\mathcal{N}$ を k 上の可換有限 group schemes の作る category とすれば．よく知られている様に次の分解が出来る．

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}' \times \mathcal{N}_p$$

ここに $\mathcal{N}'$ は etale（reduced といっても同じ）で位数（affine 環の k 上の vector space としての次元）が p と

素な可換有限 group schemes の作る部分 category．又 N_p は位数が p の巾である様な可換有限 group scheme の作る部分 category である。

N' は，G に対して $Gal(\bar{k}/k)$-module $G(\bar{k})$ を対応させる functor によって，位数が p と素な有限 $Gal(\bar{k}/k)$-module の category と同値である。

一般に，k 上の group scheme G に対して，

$$D(G) = \mathbb{H}om_{k\text{-}gr.sch.}(G,\ \mathbb{G}_m)$$

なる可換 group functor を G の Cartier dual と呼ぶ。特に G が N の object のとき，$D(G) = Spec$ (dual vector space of $\Gamma(G, \mathcal{O}_G)$) となって，$D(G)$ も又 N の object である事がわかる。ここに，$\mathbb{H}om_{k\text{-}gr.sch}(?,\ ?)$ は，よく知られた Hom-functor，$\mathbb{G}_m$ は k 上の multiplicative group $Spec(k[T, T^{-1}])$ である。

そうすると，N_p は次の様に分解出来る。

$$N_p = N_{rl} \times N_{ll} \times N_{lr}$$

ここに N_{rl}, N_{ll} 及び N_{lr} は，それぞれ，reduced で Cartier dual が local（即ち $\Gamma(G, \mathcal{O}_G)$ が local ring．これは G

が connected であるといっても同じ) なもの、それ自身及び Cartier dual が共に local なもの、及び local で Cartier dual が reduced なものの作る部分 category である。

N_p に対して Dieudonné module が定義されるのであるが、もう少しその適用範囲を拡げることが出来る。即ち、まず N_p の中で、$N_{rl}\times N_{ll}$ は unipotent な可換有限 group schemes, N_{lr} は semi-simple で位数が p の巾であるような可換有限 group schemes の作る部分 category である事に注意すれば、category

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix}\text{有限とは限らない可換} \\ \text{unipotent algebraic} \\ \text{group schemes の category}\end{pmatrix} \times N_{lr}$$

は、p の適当な巾倍で 0 になるような可換 algebraic group schemes 全体の作る category と考えることが出来る。$\mathcal{P}$ の object に対して Dieudonné module が定義されるのである。

又 $\mathcal{P}$ の objects の inductive systems の作る category Ind($\mathcal{P}$) は非常に一般的な意味での可換 "formal groups" の category と考えることが出来る。例えば、最も特別な

意味での可換 formal group（即ち演算が形式的巾級数で表わせるもの）は $\mathrm{Ind}(N_{\ell\ell} \times N_{\ell r})$ の object と考える事が出来る。

さて Dieudonné module を定義する準備として、次のようなものを考えよう。

Wを無限 Witt vectors の作る k上の ring scheme、W_nを長さ n の Witt vectors の作る k上の ring scheme とする。k上の ring scheme としてのWの準同型

$$x=(x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots) \longmapsto Fx=(x_0^p, x_1^p, \cdots, x_n^p, \cdots)$$

及び additive k-group scheme としてのWの準同型

$$x=(x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots) \longmapsto Vx=(0, x_0, x_1, \cdots)$$

がある。$W(k)$ は kを剰余体とする様な complete discrete valuation ring で unramified である。$\sigma=F(k)$ は $W(k)$ の Frobenius automorphism と一致する。このとき W 及び W_n は $W(k)$-module scheme と考えることが出来る。Fはこの構造で σ-linear Vはσ^{-1}-linear である。

従って非可換環 $A=A(k)$ を次の様に定義すれば、W

及び W_n は left A-module scheme と考えることが出来る。即ち、

$$A = W(k)[F, V]$$

ここに生成元の間の関係は、λ を $W(k)$ の勝手な元としたとき

$$\begin{cases} FV = VF = p \\ F\lambda = \lambda^\sigma F \\ \lambda V = V\lambda^\sigma \end{cases}$$

W_n の点 $(x_0, \cdots, x_{n-1})$ を W_{n+1} の点 $(0, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ に移す写像 V は additive であるが、left A-module scheme としての準同型にはならない。これを正すために $W(k)$ の作用を少し変えた left A-module scheme

$$C_{-n} = (W(k), \sigma^n) \otimes_{W(k)} W_n$$

を定義する。ここに $(W(k), \sigma^n)$ は σ^n を通じて $W(k)$ の作用するような $W(k)$ 上に定義された $W(k)$-module である。従って、任意の（可換）k-algebra R に対して

$$C_{-n}(R) = (W(k), \sigma^n) \otimes_{W(k)} W_n(R)$$

但し $\lambda, \mu \in W(k)$, $x \in W_n(R)$ に対して

$$\lambda \otimes \mu x = \lambda \mu^{\sigma^{-n}} \otimes x$$
$$\lambda(\mu \otimes x) = \lambda\mu \otimes x$$
$$F(\lambda \otimes x) = \lambda^\sigma \otimes Fx$$

$$V(\lambda \otimes x) = \lambda^{\sigma^{-1}} \otimes Vx$$

とすれば，C_{-n} 自身も left A-module functor になることは明らかである。Vによって導かれる写像

$$C_{-n} \xrightarrow{i'} C_{-(n+1)}$$

は left A-module scheme としての準同型となる。

Inductive system

$$C_{-1} \xrightarrow{i'} C_{-2} \xrightarrow{i'} C_{-3} \longrightarrow \cdots\cdots$$

の（functor としての）inductive limit を C と書き，Barsotti に従って，Witt covectors の left A-module functor と呼ぶことにする。C は $\mathrm{Ind}(\mathcal{P})$ の object とも考えることが出来る事に注意しよう。

別の方法で functor C を定義することも出来る。即ち，任意の可換 k-algebra R に対して $C(R)$ は Rの元の無限列

$$x = (\cdots\cdots, x_{-n-1}, x_{-n}, \cdots\cdots, x_{-2}, x_{-1})$$

で有限個の x_i を除いて 0 であるものの全体とし，left A-module の構造として，まず加法は，phantom components

$$x^{(m)} = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{p^i} x_{m-i}^{p^i} = \cdots\cdots + \frac{1}{p^i} x_{m-i}^{p^i} + \cdots + \frac{1}{p} x_{m-1}^{p} + x_m$$

$(m = -1, -2, -3, \cdots\cdots)$ を使って

$$(x+y)^{(m)} = x^{(m)} + y^{(m)}$$

となるように定義し、又 W(k) の元

$$\{a\} = (a, 0, 0, \cdots\cdots)$$

の作用は

$$\{a\}x = (\cdots\cdots, a^{p^{-n}} x_{-n}, \cdots\cdots, a^{p^{-1}} x_{-1})$$

F, V の作用は

$$Fx = (\cdots\cdots, x_{-n}^{p}, \cdots, x_{-1}^{p})$$

$$Vx = (\cdots\cdots, x_{-n-1}, \cdots, x_{-2})$$

と定義する。

例えば C(k) は、W(k)-module としては

$$B(k)/W(k)$$

(ここに B(k) は W(k) の商体、Witt ~~bivectors~~!) と一致し、F は σ と、V は $p\sigma^{-1}$ と一致する。特に $k = \mathbb{F}_p$ のとき、$W(k) = \mathbb{Z}_p$, $B(k) = \mathbb{Q}_p$, $C(k) = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ となる。これからもわかる様に、C(k) は W(k)-module としての唯一の simple object k の injective envelope となり、有限生成の W(k)-module に対する dualizing module となる。

さて以上の準備をすませて、いよいよ Dieudonné module を定義しよう。

$\mathcal{P}$ の object G に対して、その Dieudonné module は

$$M(G) = \mathrm{Hom}_{k\text{-gr. functor}}(G, C)$$
$$\oplus \{ W(\bar{k}) \otimes_{\mathbb{Z}} D(G)(\bar{k}) \}^{Gal(\bar{k}/k)}$$

である。以前にも述べた様に、

$$D(G)(\bar{k}) = \mathrm{Hom}_{\bar{k}\text{-gr.}}(G_{\bar{k}}, \mathbb{G}_{m\,\bar{k}})$$

で、$G_{\bar{k}}$ は G の $\bar{k}$ への base extension. $Gal(\bar{k}/k)$ は k の代数閉体 $\bar{k}$ の k 上の Galois 群. 又右肩につけた $Gal(\bar{k}/k)$ は、その作用で不変なえの全体をとることを意味する。

$M(G)$ には left A-module の構造が次の様に入る。まず第一の直和因子には、C の left A-module functor としての構造から導入されるもの、第二の直和因子には、

$\lambda \in W(k)$, $\lambda' \in W(\bar{k})$, $x \in D(G)(\bar{k})$ に対して

$$\lambda(\lambda' \otimes x) = \lambda\lambda' \otimes x$$
$$F(\lambda' \otimes x) = \lambda'^{\sigma} \otimes px$$
$$V(\lambda' \otimes x) = \lambda'^{\sigma^{-1}} \otimes x$$

で導入されるものを入れる。

Mは category $\mathcal{P}$ から left A-module の category への contravariant functor である。

$\boxed{\text{定理}}$

(i) Mによって可換 unipotent algebraic k-group schemes の作る category から有限生成 left A-modules で V のある巾で消える様なものの作る category と逆同値となる。
(ii) Mによって Category N_p =(可換有限 k-group schemes で位数が p の巾) と category (W(k)上長さ有限の left A-modules) とが逆同値になり、

$$\mathrm{rank}_k(G) = p^{\mathrm{length}_{W(k)}(M(G))}$$

が成り立つ。又これによって N_{rr} と category (W(k)上長さ有限の left A-modules で V が nilpotent に、F が bijective に作用するもの)、N_{ll} と category (W(k)上長さ有限の left A-modules で V も F も nilpotent に作用するもの) 及び N_{lr} と category (W(k)上長さ有限の left A-modules で F が nilpotent に、V が bijective に作用するもの) とが夫々逆同値となる。

k上の group scheme G に対して k上の group scheme $G^{(p)} = (k, \sigma) \times_k G$ が定義出来る。ここに (k, σ) は k を

σ を通した k-algebra と見たものである。そして k上の Frobenius homomorphism $F_G : G \longrightarrow G^{(p)}$ 及び k 上の Verschiebung $V_G : G^{(p)} \longrightarrow G$ が定義出来て，$F_G \circ V_G = p$，$V_G \circ F_G = p$ が成り立つことが知られている。特に G が $\mathcal{P}$ の object であるとき，$M(G^{(p)}) \cong (W(k), \sigma) \otimes_{W(k)} M(G)$ となることが容易にわかり，$M(F_G) : (W(k), \sigma) \otimes_{W(k)} M(G) \longrightarrow M(G)$ は $\lambda \otimes x$ を $\lambda F x$ に移す写像であり，$M(V_G) : M(G) \longrightarrow (W(k), \sigma) \otimes_{W(k)} M(G)$ は x を $1 \otimes Vx$ に移す写像であることも容易にわかる。

又 K/k を完全拡大体としたとき，$A(K) = W(K)[F, V]$，$A(k) = W(k)[F, V]$ と書くことにすれば，$\mathcal{P}_k$ の object G に対して

$$M(G_K) = A(K) \otimes_{A(k)} M(G) = W(K) \otimes_{W(k)} M(G)$$

となることも容易にわかる。

$\boxed{例}$

(i) $M(W_n) \cong A/AV^n \cong W_n(k)[F][V]/(V^n)$

特に $M(\mathbb{G}_a) \cong A/AV \cong k[F]$

(ii) $M(\mathbb{Z}/(p^n)) \cong A/AV^n + A(F-1) \cong W_n(k)$

但し　F は σ で
V は $p\sigma^{-1}$ で作用する。

これは $\mathbb{Z}/(p^n) = \ker(W_n \xrightarrow{F-1} W_n)$ から わかる。

(iii) $M(\alpha_{p^n}) \cong A/AV + AF^n \cong k[F]/(F^n)$

これは $\alpha_{p^n} = \ker(\mathbb{G}_a \xrightarrow{F^n} \mathbb{G}_a)$ からわかる。

(iv) $M(\mu_{p^n}) \cong A/AF^n + A(V-1) \cong W_n(k)$

但し F は $p\sigma$ で
V は σ^{-1} で作用する。

これは 定義より明らかである。

Cartier duality D は category $\mathcal{N}_p$ を $\mathcal{N}_p$ に移す。
と Dieudonné module functor M によって $\mathcal{N}_p$ は category $\mathfrak{F}$ = (left A-module of $W(k)$-finite length) と逆同値である事も既に述べた。 left A-module M に対して. left A-module を

$$D(M) = \mathrm{Hom}_{W(k)}(M, C(k))$$

但し. $\varphi \in D(M)$, $x \in M$ に対して $(F\varphi)(x) = \varphi(Vx)^{\sigma}$, $(V\varphi)(x) = \varphi(Fx)^{\sigma^{-1}}$ と定義すれば. D は $\mathfrak{F}$ における duality を定義する。($C(k)$ は $W(k)$-module k の injective envelope.)

$\boxed{\text{定理}}$

G を category $\mathcal{N}_p$ の object としたとき.

$$M(D(G)) = D(M(G)).$$

この定理の証明には Artin-Hasse exponential series を使う。長くなるので省略する。

Dieudonné module functor M は明らかに可換 "formal groups" の category Ind($\mathcal{P}$) から Pro(left A-modules) への contravariant functor に拡張することが出来る。これも又可換 formal group の Dieudonné module と呼ぶことにしよう。

$\boxed{例}$ (i) $\hat{G}_m = \mu_{p^\infty} = \varinjlim_n \mu_{p^n}$

従って

$$M(\hat{G}_m) = \varprojlim_n M(\mu_{p^n}) \cong \varprojlim_n W_n(k) \cong W(k)$$

但し F は $p\sigma$ で V は σ^{-1} で作用する。

(ii) $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \varinjlim_n \mathbb{Z}/(p^n)$

従って

$$M(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \varprojlim_n M(\mathbb{Z}/(p^n)) \cong W(k)$$

但し F は σ で V は $p\sigma^{-1}$ で作用する。

(iii) $M(C) \cong \varprojlim M(C_{-n}) = W(k)[F][[V]]$

$\mathrm{Ind}(\mathcal{N}_p) \subset \mathrm{Ind}(\mathcal{P})$ の object $G = \varinjlim_n G_n$ で.

ある自然数 h （Gの height 又は corank と呼ぶ）が存在して、 $\mathrm{rank}(G_n) = p^{nh}$ となり、又 $G_n \hookrightarrow G_{n+1}$ によって G_n は G_{n+1} における p^n の核と同型になるものを p-divisible group (scheme) と呼ぶ。

p倍する事によって $G_{n+1} \xrightarrow{j'} G_n$ が導かれることから $D(j') : D(G_n) \hookrightarrow D(G_{n+1})$ を使えば p-divisible group $G^t = \varinjlim_n D(G_n)$ が作れる。これを Gの Serre dual と呼ぶ。

Dieudonné module functor M を使えば category (p-divisible groups) は category (left A-modules W(k)-free of finite rank) と逆同値となることが容易にわかる。このとき $\mathrm{rank}_{W(k)}(M(G)) = \mathrm{corank}(G)$ となることもわかる。

left A-module M に対して left A-module M^t を

$$M^t = \mathrm{Hom}_{W(k)}(M, W(k))$$

但し $\varphi \in M^t$, $x \in M$ に対して $(F\varphi)(x) = \varphi(Vx)^\sigma$, $(V\varphi)(x) = \varphi(Fx)^{\sigma^{-1}}$ で定義する。

$\boxed{\text{定理}}$ p-divisible group G に対して
$$M(G^t) = M(G)^t$$

§.3 Abelian varieties

X を完全体 k 上の abelian variety としよう。一般に整数 m に対して $_mX$ を、m 倍する準同型 $m_X : X \longrightarrow X$ の核（group scheme としての）としよう。

$l \neq p = \mathrm{char}(k)$ とするとき、l-divisible group scheme $X(l) = \varinjlim_n {}_{l^n}X$ は etale であるから、corank $= 2\dim X$ の l-divisible $Gal(\bar{k}/k)$-module $X(l)(\bar{k}) = \{ l\text{-torsion elements in } X(\bar{k}) \}$ を考えることと同値である。又、rank $= 2\dim X$ の $\mathbb{Z}_l$-free $Gal(\bar{k}/k)$-module $T_l(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, X(\bar{k}))$ を考えることとも同値である。これは X に対して covariant であって、$\mathbb{Z}_l$-係数の1次元 homology 群の役割をはたす。

$l = p$ のときには、p-divisible group scheme (corank $= 2\dim X$)
$$X(p) = \varinjlim_n {}_{p^n}X$$
の Dieudonné module $M(X(p))$ は $W(k)$ 上 free

で rank = 2 dim X となり (contravariant であるが) $W(k)$-係数の 1 次元 cohomology 群の役割を果す。

簡単な計算によって

$$M(X(p)) = T_p\left(H^1(X_{Zar}, C) \oplus \{ W(\bar{k}) \otimes_{\mathbb{Z}} {}_{p^\infty}\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \}^{Gal(\bar{k}/k)} \right)$$

となることがわかる。ここに $T_p(?) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, ?)$ X_{Zar} は X の Zariski topology である。この場合には $T_p(H^1(X_{Zar}, C)) \cong H^1(X_{Zar}, W)$ となって Serre の考えたものと一致することがわかるが、X が abelian variety でない時には、$H^1(X_{Zar}, W)$ よりも $H^1(X_{Zar}, C)$ を考える方がもっと豊富な情報が得られる。

通常のように、X の dual abelian variety を X^t で表わそう。このとき次の定理が成り立つ。

$\boxed{\text{定理}}$ X を abelian variety としたとき、任意の素数 p に対して、canonical な p-divisible group としての同型

$$\psi_X : X^t(p) \xrightarrow{\sim} X(p)^t$$

があり、しかも ψ_X は交代的である。即ち、同型 $\kappa_X : X \xrightarrow{\sim} X^{tt}$ によって $X(p)$ と $X^{tt}(p)$ とを同一視し、

又、Serre duality によって $X(p)$ と $X(p)^{tt}$ とを同一視することにすれば、二つの同型

$$(\psi_X)^t : X(p) = X(p)^{tt} \xrightarrow{\sim} X^t(p)^t$$

及び

$$\psi_{X^t} : X(p) = X^{tt}(p) \xrightarrow{\sim} X^t(p)^t$$

の間には

$$(\psi_X)^t = -\psi_{X^t}$$

の関係が成り立つ。

p が標数と素な場合には、これは良く知られている。一般には、Cartier duality theorem の一番一般的な形のものを使う。特に交代性が Cartier duality theorem に含まれることに注意しよう。即ち

$\boxed{\text{定理}}$

X, Y を abelian varieties, $\varphi : X \to Y$ を isogeny とする。そのとき、

(i) $\ker(\varphi^t : Y^t \to X^t) \cong D(\ker(\varphi : X \to Y))$

(ii) (交代性)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \ker(\varphi) & \to & X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \to & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle k_X} & & \downarrow{\scriptstyle k_Y} & & \\ 0 & \to & \ker(\varphi^{tt}) & \to & X^{tt} & \xrightarrow{\varphi^{tt}} & Y^{tt} & \to & 0 \end{array}$$

を考えれば、(i)によって　$\ker(\varphi^{tt}) \cong D(\ker(\varphi^t)) \cong DD(\ker(\varphi))$ であるが、この同型と e_X から導かれる同型とは符号だけ異る。

上記の二つの定理は、base が体でない場合にも成り立つ。

特に X が標数 p の完全体であれば、left A-module としての同型

$$\Psi_X : M(X(p))^t \cong M(X(p)^t) \xrightarrow[\sim]{M(\psi_X)} M(X^t(p))$$

が、canonical に存在し、交代性

$$(\Psi_X)^t = -\Psi_{X^t}$$

が成り立つことがわかる。

X 上の invertible sheaf (又は Divisor) $\mathcal{L}$ に対して定義された準同型

$$\Lambda(\mathcal{L}) : X \longrightarrow X^t$$

を考えると、left A-module としての準同型

$$\rho(\mathcal{L}) : M(X(p))^t \xrightarrow[\sim]{\Psi_X} M(X^t(p)) \xrightarrow{M(\Lambda(\mathcal{L}))} M(X(p))$$

が得られる。$\rho(\mathcal{L})$ を $\mathcal{L}$ の定める Riemann 準同型と呼ぶことにする。$\rho(\mathcal{L})$ も又交代的である。

簡単のため，$M = M(X(p))$ と書くことにすれば，M が $W(k)$-free で有限生成であることと，left A-module として準同型 $\rho(\alpha)$ の存在と，M^t 上の交代的な $W(k)$ 上双線型型式 $b = b(\alpha)$ で，$x, y \in M^t$ に対して

$$b(Fx, y) = b(x, Vy)^\sigma$$

の成り立つものの存在とが同値である。$b(\alpha)$ を α によってきまる Riemann form と呼ぶことにすれば，$M^t = M(X(p))^t$ が X の $W(k)$-係数の一次元 homology 群の役割をはたすことがわかる。双対的に，α によって，$M \otimes_{W(k)} M$ 上の交代的な元 $c(\alpha)$ で，F, V に対する簡単な条件を充すものの存在することもわかる。これは，$M \otimes_{W(k)} M$ が $W(k)$-係数の2次元 cohomology 群と考えて，α によってきまる fundamental class が $c(\alpha)$ であると考えることが出来る。

これらに対応する事実は，$\ell \neq p$ のとき，$T_\ell(X)$ に対してよく知られている。

§4. Classification up to isogeny

p-divisible groups を isogeny で分類することは，その Dieudonné module を M としたとき，$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M = M'$

を、$A' = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A = B(k)[F, V] = B(k)[F, F^{-1}]$ 上の module として、同型で分類することと同じである。ここに、$B(k)$ は $W(k)$ の商体である。つまり $B(k)$上有限次元の left A'-module M' で、F 及び $V=pF^{-1}$ で stable な $W(k)$-lattice の存在するものを同型で分類すればよい。

Jacobson : Theory of rings (AMS Survey II, 1943), Chap. III にもくわしく述べられているように、A' は left, right principal ideal domain である。従って、任意の left A-module は、(cyclic な) indecomposable left A'-modules の直和に書ける。又上の性質を充す $W(k)$-lattice の存在も保存される。従って $B(k)$上有限次元の (cyclic) indecomposable left A'-modules で、F 及び pF^{-1} で stable な $W(k)$-lattice の存在するものを分類すればよい。

A' の中心は、σ が k で位数無限（即ち k が無限体）のとき、$\mathbb{Q}_p = B(\mathbb{F}_p)$ に、σ の位数が a（即ち $k = \mathbb{F}_{p^a}$）のとき、$\mathbb{Q}_p[F^a, F^{-a}]$ に一致する。いずれの場合にも、A' の両側 ideals は、中心の元で生成されることもわかる。

次に、特別な場合 (1) k が代数閉体 (2) $k = \mathbb{F}_{p^a}$ について

更に詳しく見てみよう。

(1) k が代数閉体の場合

この場合には、Dieudonné, Manin の結果がそのまま使えて、まず indecomposable な B(k)上有限次元の left A'-module は必ず simple であることがわかる。更に、simple left A'-module は

$A'/A'(F^h - p^n)$　　$h>0,\ n \geqq 0$ は整数で $(h, n)=1$ に

同型である。又 $W(k)$-lattice で F と $V=pF^{-1}$ で stable なもののあるための必要十分条件は、$h \geqq n$ となることである。実際このとき $m=h-n \geqq 0$ と書けば $(m,n)=1$ で

$$A'/A'(F^h-p^n) \cong A'/A'(F^m-V^n) \cong B(k) \otimes_{W(k)} A/A(F^m-V^n)$$

n をこの simple left A'-module の dimension, m を codimension と呼ぶ。hは height に一致する。例えば $n=0,\ m=1$ のとき $A/A(F-1) = M(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$

$n=1,\ m=0$ のとき $A/A(1-V) = M(\widehat{\mathbb{G}}_m)$, $n=m=1$ のとき $A/A(F-V) = M(E(p))$. ここに E は Hasse invariant が 0 であるような elliptic curve である。Manin によれば、left A-module の isogeny class を定めても、それに属する isomorphism classes は一般に無限個あり、代数多様体　で parametrize される。

(2) $k = \mathbb{F}_{p^a}$ の場合。

まず簡単のため A' の中心 $\mathbb{Q}_p[F^a, F^{-a}]$ を R と書き、$L = B(k)[F^a, F^{-a}]$ と書こう。L は可換で、$A' = B(k)[F, F^{-1}]$ は、$A' = L \oplus FL \oplus F^2L \oplus \cdots \oplus F^{a-1}L$ と書けて、L 上 rank $= a$ の free module である。容易にわかることであるが、

$$B(k)\otimes_{\mathbb{Q}_p} A' = L\otimes_R A' \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\substack{\text{right}\\ L\text{-module}}}(A')$$

となるから、実は A' は R 上の Azumaya algebra となり、L は maximal etale subalgebra となることがわかる。前にも述べた様に、A' の two-sided ideals は R の1つの元で生成される。従って、($B(k)$ 上有限次元の) left A'-module M' に対して $\mathrm{Ann}_{A'}(M')$ (Jacobson の言葉では M' の bound) は、R の1つの元で生成される。これは、本質的には M' の Frobenius 自己同型 F^a の最小多項式である。Jacobson によれば、($B(k)$ 上有限次元の) 二つの left A'-module が同型であるためには、それらが R 上同型であることが必要十分である。これを更に詳しくみよう。

$M' = A'/A'\varphi$ を indecomposable な left A'-module とする。そのとき、$\mathrm{Ann}_{A'}(M')$ は、A' のある極大 two sided ideal $\wp$ の巾、$\wp^e$ に一致する。$\wp$ は自動的

に、$R=\mathbb{Q}_p[F^a, F^{-a}]$ の既約多項式によって生成される。従って特に　　F^a の M における最小多項式は、$\mathbb{Q}_p$ 上の既約多項式の中に一致する。又

$$M'/\mathfrak{p}^e \cong \left(A'/A'\varphi\right)^{\mathrm{length}_{A'}(\mathfrak{p})}$$

となる。従って、A' 上の indecomposable な left module ($B(k)$ 上有限次元の) の同型類と、R 上の indecomposable な module の同型類とは一対一に対応する。(しかし functorial ではない。) 容易にわかるように、前者に $W(k)$-lattice で F 及び pF^{-1} で stable なものがあることと、後者に $\mathbb{Z}_p$-lattice で F^a 及び $V^a=p^aF^{-a}$ で stable なものがあることとは同値である。

従って結局、$k=\mathbb{F}_{p^a}$ 上の indecomposable な p-divisible group schemes の isogeny classes の全体と、$\mathbb{Q}_p$ 上既約な F^a の多項式の中で、その任意の根 α に対して、$\mathrm{ord}_p(\alpha)\geqq 0$ 及び $\mathrm{ord}_p(p^a/\alpha)\geqq 0$ が成り立つものの全体とが一対一に対応することがわかる。

これらの事実を使って Tate は次の事を証明した。X を $k=\mathbb{F}_{p^a}$ 上の abelian variety とすたとき、

$$\mathrm{End}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong \mathrm{End}_A(M(X(p))) = \mathrm{End}_{\substack{p\text{-div} \\ \text{gr. over } k}}(X(p))$$

これは、Tateの以前の結果

$\ell \neq p$

$$\mathrm{End}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \cong \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_\ell\text{-}Gal(\bar{k}/k)}(T_\ell(X))$$

$$= \mathrm{End}_{\substack{\ell\text{-div. gr} \\ \text{over } k}}(X(\ell))$$

を補うものであり、これによって、特に X が k 上 simple なときの $\mathrm{End}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の invariants がすべて、その固有多項式から、簡単な公式によって、得られることがわかる。